專題報導

# 畢氏定理

蘇俊鴻

**路米司（Elisha Scott Loomis, 1852-1940）所著的《畢氏定理》一書，收集了370個有關畢氏定理的各式證法。會有這麼多的證明，是因為在中世紀時，大學畢業生必須能找到一種新的證法才能得到學位。**

對於下面這個命題，讀者應該不陌生：

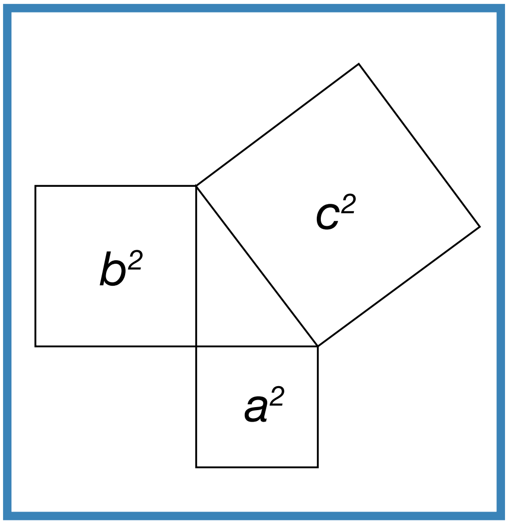
給定一個直角三角形$\Delta ABC$，若邊長分別是$a$，$b$，$c$，其中$a<b<c$，則必定滿足關係式$c^2=a^2+b^2$。

或換個說法：

直角三角形中，直角所對的斜邊上的正方形面積，等於直角兩邊上的正方形面積的和。

是的，這就是大家耳熟能詳的畢氏定理，一個幾何學上基本且漂亮的定理。同時，它的逆定理也成立，也就是說，滿足上述關係的3數$a$，$b$，$c$，必定形成一直角三角形。

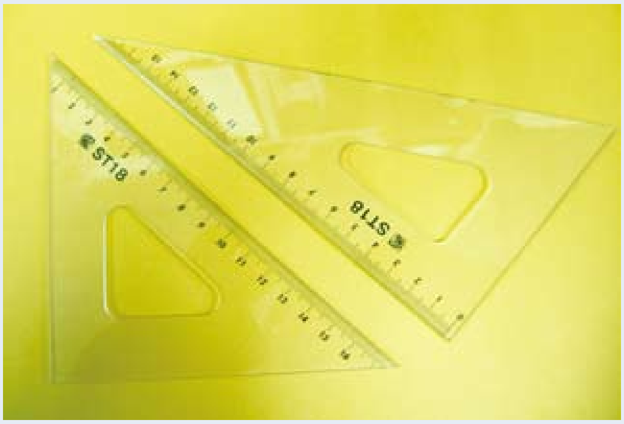
本文之所以重彈這個「舊調」，是希望能加入數學史的素材爲它添增色彩，俾使讀者可以看到畢氏定理的其他面向。

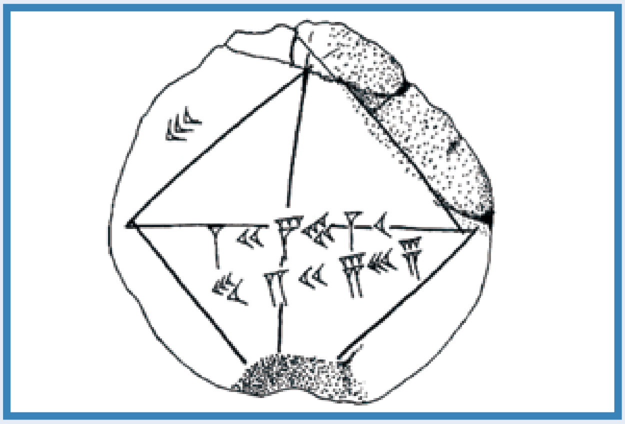



直角三角形上，直角所對的斜邊上的正方形面積等於直角兩邊上的正方形面積的和。

「畢氏定理」是因古希臘的畢達哥拉斯證明它而得名。
但在畢氏之前，已有間接的證據顯示這定理可能早已為人所知。

**古代中國的數學家可能已知道畢氏定理，同時掌握到直角三角形在解決測量問題上的重要性。**


一套三角板是說明畢氏定理的初步教具


一塊編號「YBC 7289」的巴比倫石版，現收藏於耶魯大學，石版上的數字顯示當時已知道了畢氏定理。

## 不同形式的畢氏定理

「畢氏定理」是因古希臘的畢達哥拉斯（Pythagoras）證明它而得名。據說，畢達哥拉斯證明了這一定理後欣喜若狂，便叫他的門人宰了一百頭牛大肆慶祝。因此，這個定理也被暱稱爲「百牛定理」。

但在畢氏之前，已有「間接」的證據顯示這定理可能早已爲人所知。比如，現收藏於耶魯大學的一塊編號「YBC 7289」巴比倫石版，看來就是一個立起來的正方形，在其邊上有個數字30，而橫的對角線上則有兩組數據1；24，51，10和42；25，35（其中分號前的數目代表整數）。巴比倫人是採六十進位制，把這些楔形數字轉換成現行的十進位制，可以得到

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1.414213\approx\sqrt{2}$$

$$42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}=42.42639$$ 。

因爲30×1.414213=42.42639，這說明了巴比倫人已經知道正方形邊長$a$與對角線$d$的關係是$d=\sqrt{2}a$。因此說巴比倫人知道了畢氏定理，應不爲過。

同樣地，古代中國的數學家可能也已知道這個定理，同時掌握到直角三角形在解決測量問題上的重要性。在中國，它被稱爲「勾股定理」或「商高定理」。之所以稱爲「勾股定理」，是因爲中國數學家把直角三角形稱爲勾股形。

古代中國最重要的數學經典《九章算術》中就專闢〈勾股章〉，其內容有勾股定理、解勾股形（知道其中兩邊的條件求解第三邊）、勾股容方、勾股容圓、測望問題等。不過，整章最核心的部分就是勾股定理，三國時期的劉徽註解《九章算術》時，也給了證明，容筆者稍後介紹。

至於被叫作「商高定理」，則是因爲出現在被認爲是最早成書的算經《周髀算經》的篇首，藉著周公與商高兩人的對話，給出了「勾廣三，股修

四，徑隅五」，滿足畢氏定理的三數組（也就是勾3，股4，弦5）。同時，據史家的研究，兩人的對話中也交代了這定理的證明。

此外，在印度、埃及和阿拉伯這些不同的文明中，也發現了畢氏定理以不同形式出現的紀錄。

上述的事實顯示了畢氏定理在人類文明中的重要性與普遍性。然而古代人是如何「證明」或確認這個定理爲眞呢？如果你知道目前我們所熟練使用的符號代數是直到17世紀才大致成熟，就不會驚訝於爲何畢氏定理的證明都是從面積的關係著手。

## 畢氏定理的證明

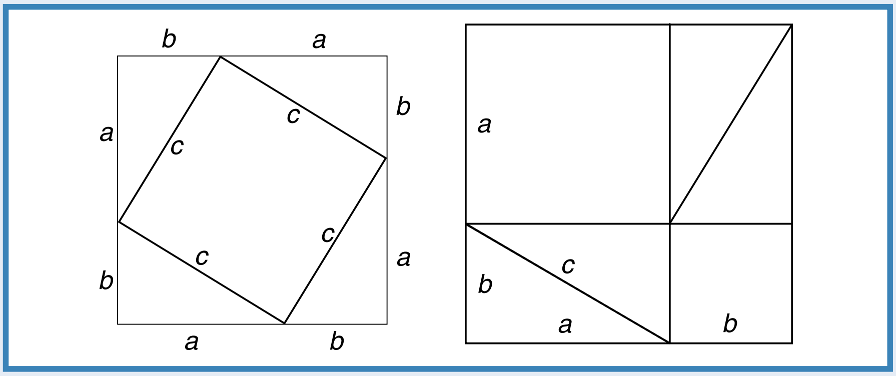
首先，從大家最熟悉的證明方法看起，雖然它的起源不甚明確，但普遍認爲其想法是來自《周髀算經》。

已知大的正方形（邊長是$a+b$）面積等於4個直角三角形（直角兩邊長$a$和$b$）和一個小的正方形（邊長是$c$）面積的和，因此

$$(a+b)^2=4\times(\frac{1}{2}ab)+c^2$$

$$\Rightarrow a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=c^2。$$




（左）大的正方形（邊長是a+b）面積等於4個直角三角形和一個小的正方形（邊長為c）面積的和。（右）把左圖重新排列可得到這個圖。這種把圖形適當切割、重新拼合的方式，是古代數學家用來證明幾何命題的重要方法。

農夫們並不會直接穿過農田去量測長方形農田的對角線長度，而是量測長方形兩邊的長度，再藉由畢氏定理求得對角線的長度。

配合簡單的代數運算，就輕易證明了畢氏定理。由此，讀者應該不難了解，爲何國中數學是在談完乘法公式後才討論畢氏定理。不過，在沒有符號代數的協助下，古代的人又是怎麼證明的呢？其實，如果把上述描繪的圖形重新排列，或許也能得解，讀者不妨想一想。

這種把圖形適當切割、重新拼合的方式，是古代數學家常用來證明幾何命題的重要方法，註解《九章算術》的劉徽稱它是「出入相補」。當然，也是他用以證明勾股定理的方法：

勾自乘為朱方，股自乘為青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不移動也。合成弦方之冪，開方除之，即弦也。

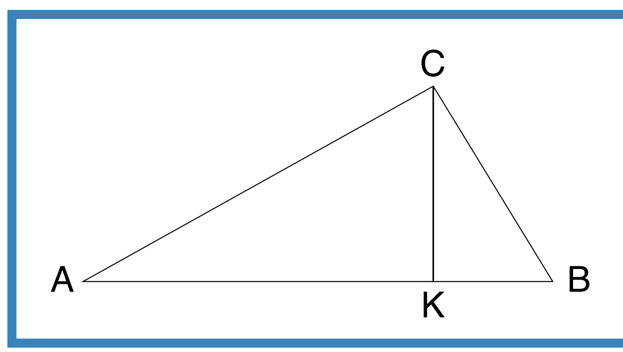
畫圖對照一下，上述文字其實不難理解。不過，劉徽原來的圖形已經佚失，清代數學家李銳（1769-1817）則提出了一種可能的補圖，讀者也可試試是否有其他不同的圖解。

另一方面，在9世紀的伊蘭斯數學家塔比．伊本．庫拉（Thâbit ibn Qurra，約826-901）的證明中，也看到了相同的方法，只是切割方式不同，但同樣妙不可言。

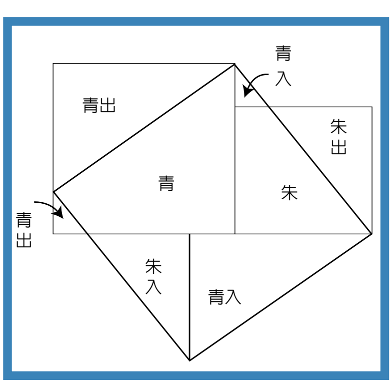
見識了這麼多種證法之後，讀者或許也想知道畢達哥拉斯是如何證明的？很遺憾，我們並不清楚。但不妨來看看稍晚於畢氏的歐幾里得（Euclid）所提出的證明，這是西方數學上最有名的證法。它記載於歐幾里得所編著，對西方數學傳統，甚至是文化傳統影響最大的一部著作《幾何原本》（*The Elements*）中，就是卷一的命題四十七。藉由圖示輔助，我們嘗試說明它的核心想法。

由直角$C$往斜邊$AB$作直線，交$AB$邊於$K$點，交$GF$邊於$J$點。只要能證明正方形$ACDE$的面積等於長方形$AKJG$的面積、正方形$BCHI$的面積等於長方形$BKJF$的面積，便可完成畢氏定理的證明。這證法因涉及面積，因此也稱爲面積證法。

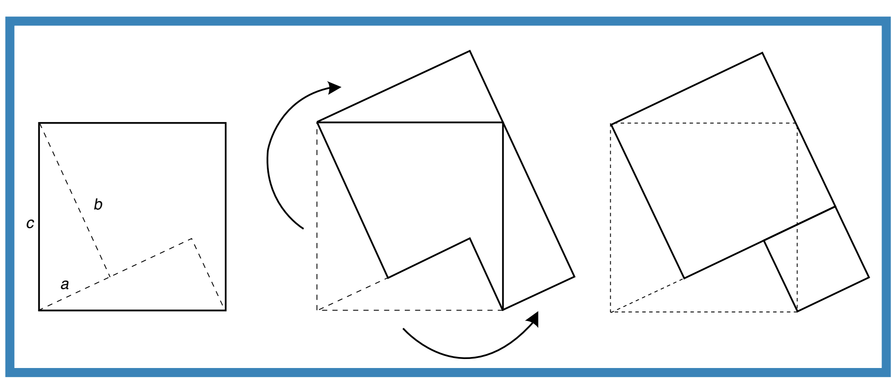
欲證明正方形$ACDE$的面積等於長方形$AKJG$的面積，歐幾里得利用：



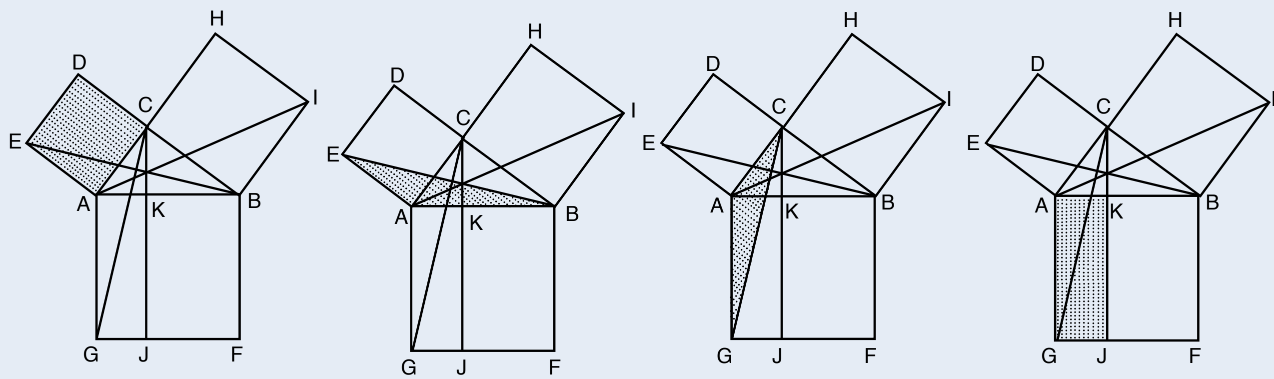

三角形ACK、CBK和ABC相似，且兩個小三角形ACK與BCK的面積和顯然等於三角形ABC的面積。




清代數學家李銳對劉徽註解的《九章算術》所提出的補圖。




在伊斯蘭數學家塔比．伊本．庫拉對於畢氏定理的證明中，也使用「出入相補」的方法，只是切割方式不同。




歐幾里得在《幾何原本》中所提出的畢氏定理的證明。

（1）正方形*ACDE*的面積等於三角形*AEB*面積的2倍（同底等高）；

（2）三角形*AEB*與三角形*ACG*全等（SAS全等，不然也可以看成以A爲旋轉中心，使三角形*AEB*順時針旋轉到三角形*ACG*）；

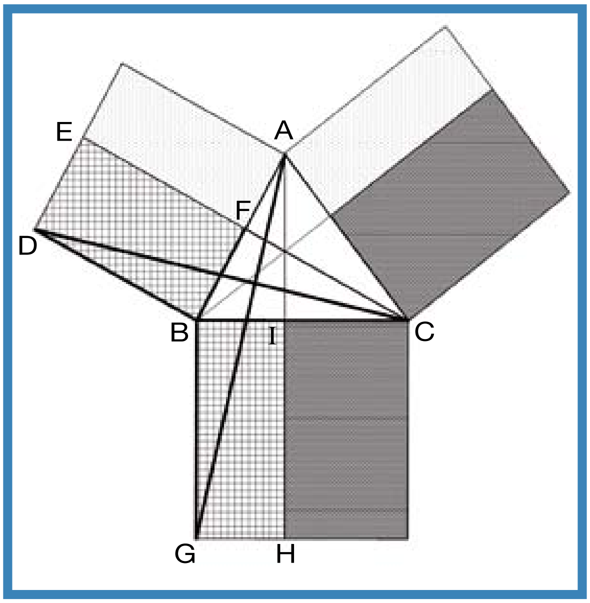
（3）三角形*ACG*面積的二倍等於長方形*AKJG*的面積（同底等高）。

同理，可證明正方形*BCHI*的面積等於長方形*BKJF*的面積。

值得一提的是，歐幾里得在《幾何原本》卷六中更把這個定理推廣成直角三角形的三邊只要能張拓出圖形（不一定是正方形），斜邊上的圖形面積仍然會等於直角兩邊上的圖形面積的和。如此一來，可稱是畢氏定理最簡潔的證明就此出現，這個證法又稱爲比例證法。

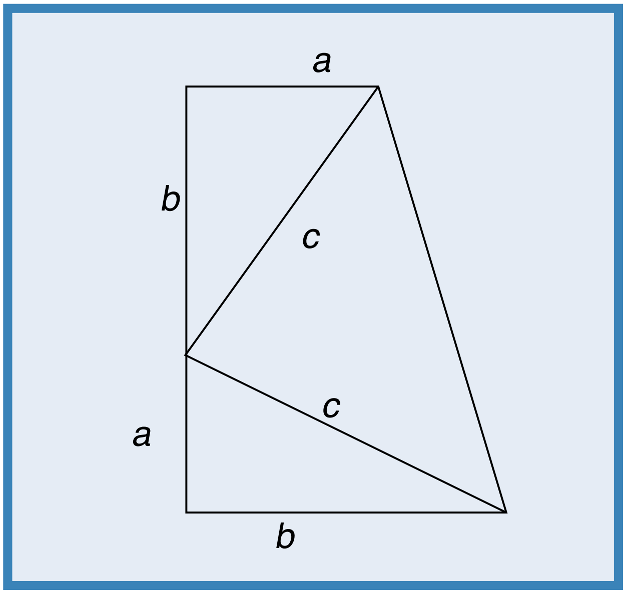
此外，上述的面積證法具有一般性。也就是說，當三角形*ABC*不是直角三角形時，一樣可以知道三角形邊長的關係。即，若*ABC*是銳角三角形時，較小兩邊上的面積和會大於最大邊上的面積。至於定量的描述，在引進三角函數後，就能輕易地把這一關係寫出，正是高中課程中的餘弦定理：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

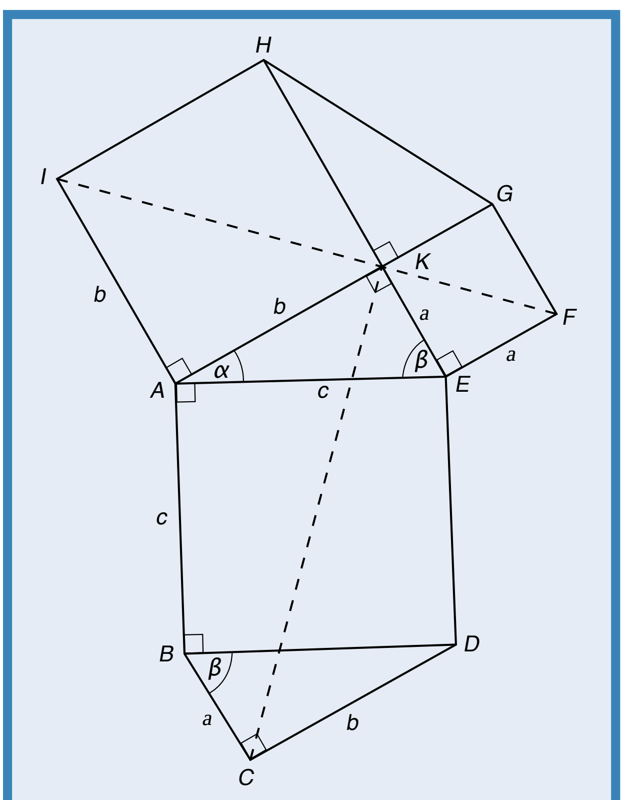



若ABC是銳角三角形，較小兩邊上的面積和會大於最大邊的面積。

由上述的介紹，不難發現畢氏定理不僅僅是課本所提$c^2=a^2+b^2$的代數關係，其證明方式也非唯一。在不同文化中，畢氏定理（或畢氏三數組）各有其不同形式，但它的重要性卻是公認的。當然，時至今日，畢氏定理仍然非常



美國第二十任總統Garfield的畢氏定理的梯形證法



天才達文西的畢氏定理的證明

重要。譬如在座標平面上所使用的距離公式，就是經由畢氏定理所建立的。

或許你會訝異於畢氏定理竟有如此多的證法。事實上，本文所介紹的證法只是較常被提及的幾個而已。路米司（Elisha Scott Loomis, 1852-1940）所著的《畢氏定理》一書，就收集了370個有關畢氏定理的各式證法。會有這麼多的證明，是因爲在中世紀時，大學畢業生必須能理解畢氏定理，並且找到一種新的證法才能得到學位。因此，找尋畢氏定理的證法就成爲一種風氣。

最後，有興趣的讀者不妨欣賞一下兩個有趣的證法。一個是美國第二十任總統Garfield的梯形證法；另一個是天才達文西的證明。

蘇俊鴻
台北市立第一女子高級中學

## 深度閱讀資料

比爾．柏林霍夫、佛南度．辜維亞著（2008），**溜柔數學史**（洪萬生、英家銘暨HPM團隊譯），博雅書屋，台北。

李繼閔（1992），《九章算術》及其劉徽注研究，九章出版社，台北。

劉鈍（1995），大哉言數，遼寧教育出版社，瀋陽。

Katz, V. J. (1993) *A History of Mathematics: An Introduction*. HarperCollins, New York, NY.

Loomis, E. S. (1968) *The Pythagorean Proposition: Its Demonstration Analyzed and Classified and Bibliography of Sources for Data of the Four Kinds of 'Proofs'*, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, DC.

Maor, Eli (2007) *The Pythagorean Theorem: A 4,000-year History*. Princeton University Press, Princeton, NJ.