

第 3 章

微分 (Differentiation)

目錄

3.1	切線	25
3.2	導函數	26
3.3	微分公式	28
3.4	連鎖律	28
3.5	高階導函數	29
3.6	隱函數微分	30
3.7	三角函數的導函數	30
3.8	反函數, 指數, 對數, 反三角函數之微分	31
3.9	雙曲函數	34
3.10	變化率	35
3.11	指數成長與衰變	37
3.12	相對速率	38
3.13	線性估計	38

- (1) 由切線的概念導入微分。
- (2) 定義導函數及導數。
- (3) 導出微分的四則運算和合成運算的公式。
- (4) 三角函數, 反三角函數與指數, 對數, 雙曲函數的微分。
- (5) 隱函數微分。
- (6) 微分應用, 包括變化率、相對速率及線性估計。

3.1 切線 (Tangents)

定義 3.1.1. (1) 曲線 $y = f(x)$ 在點 $P(a, b)$ 之斜率 (slope) 為

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

(假設其極限存在。)

(2) 其切線 (tangent line) 為通過 P , 且其斜率為 m 的直線, 即

$$y = f(a) + m(x - a).$$

(3) 其法線 (normal line) 為通過 P 且與切線垂直的直線, 即

$$y = f(a) - \frac{1}{m}(x - a).$$

註 3.1.2. 圓 C 在 P 點的切線 L , 滿足以下三特性: (a) L 與過 P 之半徑垂直, (b) L 與 C 只交於一點, (c) C 位於 L 的一側。但一般曲線上的切線不見得滿足以上條件。

例 3.1.3. 求 $y = x^2$ 在點 $(2, 4)$ 的斜率 (slope), 並求其切線方程式。

例 3.1.4. 求 $y = \frac{3}{x}$ 在點 $(3, 1)$ 的切線方程式。

例 3.1.5. $y = mx + b$ 在其上任一點的切線為本身。

定義 3.1.6. (1) 設兩曲線相交於 P 點, 則此兩曲線在 P 點的交角定義為它們過 P 點之切線的交角 (angle between two curves)。

(2) 若兩曲線在 P 點的交角為直角, 則稱它們為正交 (orthogonal)。

(3) 若兩曲線在 P 點的切線相同, 則稱它們為相切。

3.2 導函數 (Derivatives)

導數與導函數

定義 3.2.1. (1) 令 $f(x)$ 為一函數, 且 $a \in \text{Dom } f$ 。假設極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ 存在, 則定義此極限為函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 的導數 (derivative), 記為 $f'(a)$, 且稱函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 可微 (differentiable)。

(2) 對任一個可微點 a , 其對應一值 $f'(a)$; 此對應可定義一個函數 $f'(x)$, 稱為 $f(x)$ 對於 x 的導函數 (derivative)。即

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \left(= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right).$$

導函數的定義域即為所有可微之點。

註 3.2.2. (1) 求導函數的過程稱為微分 (differentiation)。

(2) 給定 $y = f(x)$, 其導函數可記為以下形式:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x) = \dot{f}(x).$$

(3) 導數可記為 $f'(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{dy}{dx} \right]_{x=a}^\circ$

(4) 利用 Leibniz 的符號, 導函數的定義可表為 $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 。

例 3.2.3. 試描繪右圖中之函數的導函數圖形。

例 3.2.4. 討論以下各函數的導函數：

- (1) $\frac{d}{dx} x^n, n \in \mathbb{N}$,
- (2) $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^n}\right), n \in \mathbb{N}$,
- (3) $\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}$ 。

例 3.2.5. 求 $\frac{d}{dx} \sqrt{x}$, 及 $y = \sqrt{x}$ 在 $x = 4$ 的切線, 法線方程式。

例 3.2.6. (a) 求過 $(1, 1)$, 且與 $y = x^2$ 相切的直線。

(b) 求過 $(-1, -1)$, 且與 $y = x^2$ 相切的直線。

例 3.2.7. 求 $y = 1 + x^2$ 及 $y = -1 - x^2$ 的公切線。

例 3.2.8. 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 可微, 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 。

定義 3.2.9. (1) 若 $f(x)$ 在一開區間 (a, b) 上每一點均有導數, 則稱它在 (a, b) 上可微。

- (2) 若 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ 存在, 則稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 有右導數 $f'_+(a)$;
若 $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ 存在, 則稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 有左導數 $f'_-(a)$ 。

(3) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上可微, 且在 $x = a$ 有右導數, 在 $x = b$ 有左導數, 則稱 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微。

例 3.2.10. 討論以下各函數的導函數：

- (1) $f(x) = |x|$,
- (2) $f(x) = \lfloor x \rfloor$,
- (3) $f(x) = \sqrt{|x|}$ 。

可微性與連續性

定理 3.2.11. 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 可微, 則 $f(x)$ 在 $x = a$ 連續。

註 3.2.12. (1) $f(x)$ 在 $x = a$ 不可微的三種可能狀況：

- (a) $f(x)$ 在 $x = a$ 不連續。
- (b) $f(x)$ 在 $x = a$ 連續, 但 $f'_+(a) \neq f'_-(a)$, 稱為拐點 (corner 或 kink)。
- (c) $f(x)$ 在 $x = a$ 連續, 但 $\lim_{x \rightarrow a} |f'(x)| = \infty$, 稱為臍點 (cusp), 有垂直切線。

(2) (a) 一函數連續, 不見得可微。(例如 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 處。)

(b) 一函數在 a 可微, 則必有切線。

(c) 一函數在 a 雖有切線, 但不必可微。(可能為垂直切線。)

定理 3.2.13. (Darboux, 導函數的中間值定理) 若 $f(x)$ 在 I 上可微, 且 $a, b \in I$, 則 $f'(x)$ 對 $f'(a)$ 及 $f'(b)$ 之間每一數均可取值。即: 對介於 $f'(a)$ 與 $f'(b)$ 之間的任意數 k , 皆存在 $c \in I$ 使得 $f'(c) = k$ 。

例 3.2.14. 是否存在 \mathbb{R} 上的可微函數, 使其導函數是 $\lfloor x \rfloor$?

3.3 微分公式

定理 3.3.1. 假設 $f(x), g(x)$ 均可微。

$$(1) \frac{d}{dx}(c) = 0.$$

$$(2) \frac{d}{dx}(c(f(x))) = c \frac{d}{dx} f(x).$$

$$(3) \frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{d}{dx} f \pm \frac{d}{dx} g.$$

$$(4) \frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx}.$$

$$(5) \frac{d}{dx}(fgh) = \frac{df}{dx}gh + f \frac{dg}{dx}h + fg \frac{dh}{dx}. \text{ [此公式可推廣到 } n \text{ 個函數相乘。]}$$

$$(6) \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{df}{dx}g - f \frac{dg}{dx}}{g^2}.$$

例 3.3.2. 微分以下各函數：

$$(1) f(t) = \sqrt{t}(a + bt),$$

$$(2) \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}.$$

$$(3) y = \frac{(x^2 + \frac{1}{x})(x^3 + 3)}{x+1}.$$

例 3.3.3. 若 $y = uv$ ，且 $u(2) = 3, u'(2) = -4, v(2) = 1, v'(2) = 2$ ，求 $y'(2)$ 。

例 3.3.4. 若 $f(x) = \sqrt{x}g(x)$ ，且 $g(4) = 2, g'(4) = 3$ ，求 $f'(4)$ 。

例 3.3.5. 求 $y = x^4 - 6x^2 + 4$ 的水平切線方程式。

例 3.3.6. 令 $f_{ij}(x)$ 為可微函數。求行列式 $g(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix}$ 的導函數。

3.4 連鎖律 (Chain Rule)

定理 3.4.1. 若 $f(u)$ 在 $u = g(x)$ 處可微， $g(x)$ 在 x 處可微，則合成函數 $f \circ g$ 在 x 處可微， $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 。

例 3.4.2. 微分以下各函數：

$$(1) y = (x^3 - 1)^{100},$$

$$(2) y = (2x + 1)^5(x^3 - 2x + 1)^4,$$

$$(3) f(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9,$$

$$(4) g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}},$$

$$(5) h(x) = \sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x^3 + 1}}.$$

例 3.4.3. 證明 $y = \frac{1}{(1-2x)^3}$ 的每一條切線都是正斜率。

3.5 高階導函數 (Higher-Order Derivatives)

3.5.1. 給定 $y = f(x)$, 假設 $f'(x)$ 也可微。定義 $f''(x) = (f'(x))'$, 稱為 $f(x)$ 的二階導函數。同樣, 可定義 $f'''(x) = (f''(x))'$, \dots , $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ 。 $f^{(n)}$ 稱為 n 階導函數。

符號 3.5.2. $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$ 。

定理 3.5.3 (Leibniz). $(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$, 其中 $f^{(0)} = f$, $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ 為二項係數。

[註]

- (1) 此處的符號 $\binom{n}{i}$ 即為同學們在高中習慣使用的 C_i^n 。
- (2) 請將此定理與二項式定理 $(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$ 比較之。

例 3.5.4. 求以下各例的 $f^{(n)}$ 。

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$,

(2) $y = x^n$,

(3) $y = \frac{1}{2x+3}$,

(4) $y = \frac{1}{x^2-1}$,

(5) $y = \frac{1}{x^2-4x+3}$ 。

例 3.5.5. 證明 $\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) = \frac{(-1)^{n-1} n! c^{n-1} (ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$ 。

例 3.5.6. 求 $\left(\frac{x^3}{x^2-1} \right)^{(96)}$ 。

註 3.5.7. 你是否可以猜測 出一般項 $(f \circ g)^{(n)}(x)$ 的公式。事實上,

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum \frac{n!}{m_1! m_2! m_3! \cdots m_n!} f^{(m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n)}(g(x)) \prod_{j=1}^n \left(\frac{g^{(j)}(x)}{j!} \right)^{(m_j)},$$

其中求和符號 Σ 是對所有滿足 $1m_1+2m_2+3m_3+\cdots+nm_n = n$ 之非負整數 $(m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n)$ 求和。這公式稱為 faà di Bruno(1825-1888) 公式。

例 3.5.8. 令 Legendre 多項式為 $\chi_n(x) = \frac{1}{2^n n!} [(x^2-1)^n]^{(n)}$ 。

(a) 證明 $(x^2-1)\chi_n'' + 2x\chi_n' - n(n+1)\chi_n = 0$ 。

(b) 求 $\chi_n(1)$ 及 $\chi_n(-1)$ 。

3.6 隱函數微分 (Implicit Differentiation)

例 3.6.1. (a) 若 $x^2 + y^2 = 25$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

(b) 過圓 $x^2 + y^2 = 25$ 上一點 $(3, -4)$ 的切線方程式為何?

例 3.6.2. 若 $\frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$, 求 $\frac{d}{dx}(x^{\frac{q}{p}})$ 。

例 3.6.3. 求 $\frac{d}{dx}(1 - x^2)^{1/4}$

例 3.6.4. 曲線 $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ 上有一點斜率為 -1 , 求該點。

例 3.6.5. 星形線為 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$ 。證明過其上任何一點的切線, 被座標軸截出線段長度為一常數。

[註] 試比較 $x^2 + y^2 = a^2$, $|x| + |y| = a$, 與 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 之圖形。

例 3.6.6. 若 $x^4 + y^4 = 16$, 求 y'' 。

例 3.6.7. (a) 若 $x^3 + y^3 = 9xy$, 求 y' 。

(b) 過 the folium of Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$ 上一點 $(3, 3)$ 的切線及法線方程式為何?

(c) 曲線上哪一點的切線為水平?

(d) 討論過原點的切線方程式。

3.7 三角函數的導函數

定理 3.7.1. (1) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ 。

(2) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ 。

(3) $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$ 。

(4) $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$ 。

(5) $\frac{d}{dx} \sec x = \tan x \sec x$ 。

(6) $\frac{d}{dx} \csc x = -\cot x \csc x$ 。

例 3.7.2. 微分以下函數:

(a) $y = \sin(x^2)$,

(b) $y = \sin^2 x$ 。

例 3.7.3. 求以下函數的導函數:

(1) $g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$,

(2) $f(x) = \sin(\cos(\tan x))$,

(3) $y = \sin(x^\circ)$ 。

例 3.7.4. 求 $y = \sin^5 x$ 在 $x = \pi/3$ 的切線方程式。

例 3.7.5. 求 $f(x) = \frac{\sec x}{1 + \tan x}$ 的水平切線方程式。

例 3.7.6. (a) 證明 $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2}x)}{2 \sin \frac{x}{2}}$ 。

(b) 導出和 $\sin x + 2 \sin 2x + \cdots + n \sin nx$ 之公式。

例 3.7.7. 若 $\sin(x + y) = y^2 \cos x$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

例 3.7.8. $y = \sec x$, 求 y'' 。

例 3.7.9. $y = \sin x$, 求 $y^{(n)}$ 。

例 3.7.10. $y = x^3 \sin 2x$, 求 $y^{(95)}$ 。

例 3.7.11. 令 $f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 。求滿足下列各條件之 n 值:

(a) 使其連續; (b) 使其可微; (c) 使其導函數連續; (d) 使其二階可微; (e) 嘗試推廣之。

3.8 反函數, 指數, 對數, 反三角函數之微分

反函數之微分

定理 3.8.1. 若 f 定義在區間 I 上, $f'(x)$ 在 I 上存在, 且均不為 0, 則 f^{-1} 在 I 上可微, 且 $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ 。

[註]

(1) 此定理之幾何意義。

(2) 若一函數 $y = f(x)$ 可將其參數化為 $x = t, y = f(t)$ 。則其反函數可參數化為 $x = f(t), y = t$ 。

例 3.8.2. (1) $f(x) = x^2, x \geq 0$ 。求 $(f^{-1})'(x)$ 。

(2) $f(x) = x^3 - 2$, 求 $\frac{df^{-1}}{dx} \Big|_{x=6}$ 。

自然指數函數之微分

性質 3.8.3. $\frac{d}{dx}(a^x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = (\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h})a^x$ 。且 $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$

定義 3.8.4. e 是一個數, 滿足 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ 。

定理 3.8.5. (1) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ 。

(2) $\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$ 。

例 3.8.6. 微分:

(1) $y = e^{\sec 3\theta}$ 。

(2) $y = \sin(x^2 + e^x)$ 。

例 3.8.7. (1) 求 $y = \frac{e^x}{x^2+1}$ 在 $P(1, \frac{e}{2})$ 的切線及法線方程式。

(2) 曲線 $y = e^x$ 上那一個點的切線平行於 $y = 2x$ 。

例 3.8.8. 若 $f(x) = xe^x$, 求 $f^{(n)}$ 。

自然指數函數之微分

定理 3.8.9. (1) $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ 。

(2) 若 $u = u(x)$, 則 $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$ 。

(3) $\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ 。

例 3.8.10. 微分以下各函數:

(1) $y = \ln(x^3 + 1)$ 。

(2) $y = \ln(\sin x)$ 。

(3) $f(x) = \sqrt{\ln x}$ 。

(4) $y = \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$ 。

例 3.8.11. 求 $y = \ln x$ 之切線使其通過原點。

例 3.8.12. 當 c 為何值時, 圖形 $y = \ln x$ 及 $y = cx^2$ 恰交於一點?

一般指數函數之微分

定理 3.8.13. (1) $\frac{d}{dx} a^x = \ln a \cdot a^x$,

(2) $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$ 。

定理 3.8.14. 對任意實數 r , $\frac{d}{dx} u^r = ru^{r-1} \frac{du}{dx}$ 。

例 3.8.15. 求:

(1) $\frac{d}{dx} 3^{\sin x}$ 。

(2) $\frac{d}{dx} x^{\sqrt{2}}$ 。

(3) $\frac{d}{dx} (2 + \sin 3x)^\pi$ 。

一般對數函數之微分

定理 3.8.16. $\frac{d}{dx} (\log_a u) = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$ 。

定理 3.8.17. $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{y})^y$ 。

例 3.8.18. 求

(1) $\frac{d}{dx} \log(3x+1)$ 。

(2) $\frac{d}{dx} \log_5(2+\sin x)$ 。

對數微分法 (logarithmic differentiation)

例 3.8.19. (1) 求 $\frac{dy}{dx}$, 其中 $y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$

(2) 求 $\frac{d}{dx}(x^{\sqrt{x}})$, $x > 0$ 。

(3) 求 $\frac{d}{dx}(x^{x^x})$, $x > 0$ 。

註 3.8.20. 注意分辨以下四種類型函數的微分:

$$(1) \frac{d}{dx}(a^b) = 0,$$

$$(2) \frac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x),$$

$$(3) \frac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x),$$

$$(4) \frac{d}{dx}[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)} \left[\frac{g(x)f'(x)}{f(x)} + g'(x) \ln f(x) \right].$$

反三角函數之微分

定理 3.8.21. (1) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$, $|u| < 1$,

$$(2) \frac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, |u| < 1,$$

$$(3) \frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx},$$

$$(4) \frac{d}{dx}(\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx},$$

$$(5) \frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, |u| > 1,$$

$$(6) \frac{d}{dx}(\csc^{-1} u) = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, |u| > 1.$$

例 3.8.22. 微分:

$$(1) y = \frac{1}{\sin^{-1}(x^2)},$$

$$(2) f(x) = x \arctan \sqrt{x},$$

$$(3) y = \sec^{-1}(5x^4).$$

例 3.8.23. 求 $y = \cot^{-1} x$ 在 $x = -1$ 的切線方程式。

例 3.8.24. 證明 $\frac{d}{dx} \sin^{-1}(\sin x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$, 若 $x \neq (n + \frac{1}{2})\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ 。

例 3.8.25. 若 $y = \tan^{-1} x$, 證明

$$(1) y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \sin n \left(y + \frac{\pi}{2} \right).$$

$$(2) y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x^2)^{-\frac{n}{2}} \sin \left(n \tan^{-1} \frac{1}{x} \right), x > 0.$$

$$(3) \text{求 } y^{(n)}(0).$$

例 3.8.26. 令 $y = \sin^{-1} x$, 求 $y^{(n+1)}$ 。

3.9 雙曲函數 (hyperbolic functions)

雙曲函數及其導函數

定義 3.9.1. 雙曲函數定義為

$$(1) \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$(2) \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$(3) \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$(4) \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$(5) \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

$$(6) \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

註 3.9.2. (1) $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$.

(2) $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$.

(3) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = -1$ 。(可應用至雙曲線的參數式。)

定理 3.9.3. 雙曲函數之導函數為

$$(1) \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x,$$

$$(2) \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x,$$

$$(3) \frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x,$$

$$(4) \frac{d}{dx} \coth x = -\operatorname{csch}^2 x,$$

$$(5) \frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x,$$

$$(6) \frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x.$$

例 3.9.4. $\frac{d}{dt}(\tanh \sqrt{1+t^2})$

反雙曲函數及其導函數

定義 3.9.5. 反雙曲函數為

$$(1) y = \sinh^{-1} x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(2) y = \cosh^{-1} x : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty),$$

$$(3) y = \tanh^{-1} x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(4) y = \coth^{-1} x : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$(5) y = \operatorname{sech}^{-1} x : (0, 1] \rightarrow [0, \infty),$$

$$(6) y = \operatorname{csch}^{-1} x : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

註 3.9.6. 反雙曲函數可具體以對數函數表出如下:

$$(1) \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in \mathbb{R},$$

$$(2) \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1,$$

$$(3) \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, |x| < 1,$$

$$(4) \coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, |x| > 1,$$

$$(5) \operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), x \neq 0,$$

$$(6) \operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right), |x| > 1.$$

定理 3.9.7. 反雙曲函數之導函數為

$$(1) \frac{d(\sinh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}, \forall u,$$

$$(2) \frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, u > 1,$$

$$(3) \frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, |u| < 1,$$

$$(4) \frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, |u| > 1,$$

$$(5) \frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, 0 < u < 1,$$

$$(6) \frac{d(\operatorname{csch}^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}, u \neq 0.$$

例 3.9.8. 求 $\frac{d}{dt}(\tanh^{-1}(\sin x))$ 。

3.10 變化率 (Rate of Changes)

定義 3.10.1. 給定函數 $y = f(x)$,

(1) 在 x_1 處, x 的變化為 $\Delta x = x_2 - x_1$, 所對應 y 的變化為 $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ 。

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 稱為 y 在 $[x_1, x_2]$ 上對 x 的平均變化率。

(3) $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 稱為 y 對 x 的瞬時變化率。(若此極限存在。)

例 3.10.2. 圓的面積為 $A = \frac{\pi}{4} D^2$, D 為直徑。求在 $D = 10$ 時, 圓的面積對直徑的變化率。

物理

定義 3.10.3. 若一物體直線運動, 在時間 t 的位置為 $s = f(t)$, 則在時間 t ,

(a) 物體的運動速度 (velocity) 為 $v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ 。

(b) 速率 (speed) 為 $|v(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$ 。

(c) 加速度 (acceleration) 爲 $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ 。

(d) 急跳度 (jerk) 爲 $j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$ 。

例 3.10.4. 一物體的位置函數爲 $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (t 單位爲秒, s 單位爲公尺)

(a) 求時間 t 的速度。

(b) 求 $t = 2$ 及 $t = 4$ 的速度。

(c) 何時粒子靜止?

(d) 何時粒子向前 (即正向)?

(e) 作圖表現粒子的運動。

(f) 求該粒子在前 5 秒鐘移動的總距離。

(g) 求時間 t 的加速度。

(h) 何時粒子加速? 何時減速?

(i) 作 $0 \leq t \leq 5$ 時, 位置、速度和加速度的函數圖形。

例 3.10.5. 一段電線其質量不均勻。從左端點算起到 x 公尺處, 質量爲 $m = f(x)$ 。則在 x 處的 (線性) 密度爲 $\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$ 。

例如: 若 $m = \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 1.2$, 則在 $x = 1$ 的密度爲 $\rho = \frac{dm}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$ 。

例 3.10.6. 在 Δt 時, 通過一電線的靜電荷 (net charge) 爲 ΔQ , 則在時間 t 的電流 (current) 爲 $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$ 。

化學

例 3.10.7. 例: 由 reactant A 和 B 經化學反應生成 product C , 即 $A + B \rightarrow C$ 。 A 之濃度 (mole/liter) 記爲 $[A]$ 。 C 的反應速率爲 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta [C]}{\Delta t} = \frac{d[C]}{dt} > 0$, $\frac{d[C]}{dt} = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt}$ 。

若 $aA + bB \rightarrow cC + dD$, 則 $-\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d} \frac{d[D]}{dt}$ 。

熱力學

例 3.10.8. 在恆溫下, 物質的體積與壓力有關。 $\frac{dV}{dP} < 0$, compressibility 定義爲 $\beta = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}$ 。

例如: 假設一物體在 $25^\circ C$ 時, 體積與壓力的關係爲 $V = \frac{5.3}{P}$, 則在 $P = 50 \text{ kpa}$ 時的 compressibility 爲 $\beta = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} \Big|_{P=50} = 0.02 \text{ (m}^3/\text{kpa) / m}^3$ 。

生物學

例 3.10.9. 若 $n = f(t)$ 爲一種動物或植物在時間 t 時的個體數。其成長率爲 $\frac{dn}{dt}$ 。

例如: 細菌數目每小時加倍, 則 $f(t) = 2^t n_0$, $\frac{dn}{dt} = n_0 2^t \ln 2$ 。若 $n_0 = 100$, 則 4 小時後爲 $\frac{dn}{dt} \Big|_{t=4} = 1600 \ln 2 \approx 1109$ 。

例 3.10.10. 血管長 L , 半徑爲 R , 因管壁的摩擦力, 血液的速度與它和血管中心軸的距離 r 有關。 laminar law (法國物理學家 Jean-Louis-Movie Poiseuille 1840 年發現) 爲 $V = \frac{P}{4\eta L} (R^2 - r^2)$, 其中 P 是血管兩端的壓力差, η 是血液的黏度。 Velocity gradient 是 $\frac{dV}{dr}$ 。

例如: 設一個小孩的動脈是 $\eta = 0.027, R = 0.008, L = 2 \text{ cm}, P = 4000 \text{ dynes/cm}^2$, 在 $r = 0.002 \text{ cm}$ 時, $\frac{dV}{dr} = -\frac{4000(0.0002)}{2(0.027)^2} \approx -74 \text{ (cm/s)/cm}$

經濟

例 3.10.11. 一工廠生產固定寬度的布料, 生產 x 公尺的成本是 $C = f(x)$ 。

(a) $f'(x)$ 的意義為何? 單位為何?

(b) $f'(1000) = 9$ 的意義為何?

(c) $f'(500)$ 及 $f'(50)$, 你認為哪一個比較大? $f'(5000)$ 呢?

定義 3.10.12. 若 $C(x)$ 為生產量 x 時的成本函數 (cost function), 則生產的邊際成本 (marginal cost) 為 $\frac{dc}{dx}$ 。 ($C'(n) \approx C(n+1) - C(n)$). 其意義為每多生產一件產品時所增加的成本

例 3.10.13. 若 $C(x) = 10000 + 5x + 0.001x^2$, 則 $C'(500) = 15, C(501) - C(500) = 15.01$ 。 $C'(500) \approx C(501) - C(500)$

[註] 通常總成本為 $C(x) = a + bc + cx^2 + dx^3$, a 為固定成本 (overhead cost), 例如租金、維護費。其他項是變動成本, 材料的成本與 x 成正比, 但勞力成本可能與 x 較高冪次有關, 例如加班費、工作效率等。

其他科學

3.10.14. 氣象學家要知道大氣壓力與高度的關係。

地質學家關心岩漿在石頭中溫度冷卻的速度。

都市地理學家要知道一城市人口密度與它和都市中心之距離的變化關係。

心理學家關心學習曲線。

社會學家關心流言傳播的速度。

3.11 指數成長與衰變(Exponential Growth and Decay)

3.11.1. 若一個量 y 在時間 t 時增加 (或減少) 的速度與在該時的量成正比, 在時間 $t = 0$ 時的量記為 y_0 。則 y 滿足初值問題 $y'(t) = ky(t)$, $y(0) = y_0, y > 0$ 。

定理 3.11.2. 以上的量滿足指數變化律 (law of exponential change), 即 $y = y_0e^{kt}$ 。當 $k > 0$ 為成長, $k < 0$ 為衰變。 k 稱為成長常數。

3.11.3. 人口成長: $\frac{dP}{dt} = kP$, k 為人口相對成長率。

例 3.11.4. 在 1950 年世界人口 25.60 億, 1960 年為 30.40 億, 以此作出人口模式。人口相對成長率是多少? 估計 1993 年及 2020 年的人口數。

3.11.5. 放射性物質衰變: $\frac{dm}{dt} = -km$, k 為相對衰變率。

例 3.11.6. 鐳-226 半生期是 1590 年, 一個鐳的樣本重 100 mg, 求 t 年後鐳之質量的公式, 求 1000 年後的質量, 何時剩下 30 mg?

3.11.7. 牛頓冷卻定律 (Newton's Law of Cooling): 令 $H(t)$ 為物體在時間 t 的溫度, H_s 為周圍環境的溫度, 則其滿足微方 $\frac{dH}{dt} = -k(H - H_s)$ 。由此得 $H = H_s + (H_0 - H_s)e^{-kt}$, H_0 是 $t = 0$ 的溫度。

例 3.11.8. 室溫 22°C 的汽水放入 7°C 的冰箱中。半小時後, 汽水的溫度是 16°C 。(a) 再半小時溫度降到多少? (b) 須多久, 才會使溫度降到 10°C 。

3.11.9. 連續複利 (continuously compounded interest): 投資 A_0 元, 固定年利率為 r , 採連續複利, 則在 t 年後的本利和是 $A(t) = A_0e^{rt}$ 。

例 3.11.10. 若在銀行存款 1000 元, 以連續複利 6% 計算, 3 年後的本利和是多少?

3.12 相對速率(Related Rates)

例 3.12.1. 空氣注入球形氣球, 其體積以速率 $100 \text{ cm}^3/\text{sec}$ 增加, 則在直徑為 50 cm 時, 其半徑增加速率為何?

例 3.12.2. 5 m 長的梯子斜靠一牆, 其底部以 $1 \text{ m}/\text{sec}$ 速率滑開, 則在底部離牆腳 3 m 時, 梯子頂部下降速率若干?

例 3.12.3. 在一交叉路上, 警車正以 $60 \text{ mile}/\text{hr}$ 的速度向南開, 此時位置在交叉口北方 0.6 mile 處。一違規車輛在交叉口東方 0.8 mile 處往東開。警察以雷達測得兩車距離以 $20 \text{ mile}/\text{hr}$ 的速率增加, 求此時違規車的速率多少?

例 3.12.4. 有一高 4 公尺電線桿. 王先生在 9 公尺外放天燈, 天燈以 $\frac{1}{3}$ 公尺/秒的速率上升。則在高度為 16 公尺時, 電線桿影子縮短的速率若干?

例 3.12.5. 一倒立的圓錐形容器, 高 4 m , 底半徑 2 m 。現以 $2 \text{ m}^3/\text{min}$ 的速率倒入水, 則當水面高 3 m 時, 水面升高的速率為若干? 並求加速度。

例 3.12.6. 一人在路上以 $1.5 \text{ m}/\text{s}$ 的速度走, 探照燈在距馬路 6 m 遠處持續照這人, 則這人位在距探照燈與馬路最近之點 8 m 處時, 探照燈轉動的速度若干?

3.13 線性估計 (Linearizations)

定理 3.13.1. $f(x)$ 在包含 $x = a$ 的某個開區間上有定義, 則 $f'(a) = m$ 的充要條件為

$$f(x) = f(a) + m(x - a) + r(x)(x - a),$$

其中 $r(x)$ 在 $x = a$ 連續, 且 $r(a) = 0$ 。

定義 3.13.2. (1) 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 可微, 則函數 $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ 稱為 f 在 a 的線性化 (linearization)。

(2) 此估計 $f(x) \approx L(x)$ 稱為 f 在 a 的標準線性估計 (standard linear approximation), a 稱為估計中心 (center of approximation)。

例 3.13.3. (1) 求 $f(x) = \sqrt{3+x}$ 在 $x = 0$ 及 $x = 1$ 的線性化。

(2) 求 $\sqrt{3.98}, \sqrt{4.05}$ 的估計值。

(3) 估計式 $\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$ 在 x 為何值時, 精確到 0.5 之內?

定義 3.13.4. 令 $y = f(x)$ 為可微函數, dx 為一獨立變數。微分 (differential) dy 定義為 $dy = f'(x)dx$ 。

註 3.13.5. (微分的幾何意義及誤差) 若 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 可微, 且 x 從 a 變化到 $a + \Delta x$, 則

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a)\Delta x + \epsilon\Delta x,$$

此處 $\Delta x \rightarrow 0$ 時, $\epsilon \rightarrow 0$ 。因此當 Δx 很小時, $\Delta y \approx dy$ 。此即線性逼近定理 (linear approximation theorem)。

例 3.13.6. 若 $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$, 比較 Δy 和 dy , 其中:

(a) x 從 2 到 2.05 ;

(b) x 從 2 到 2.01 ;

例 3.13.7. 球半徑測量值為 21 cm , 可能產生 0.05 cm 的誤差。則其計算球體積時會產生多少誤差?